7 Théorème d'Egorov

L'enoncé et la preuve du théorème d'Egorov se trouvent dans [GH22, Théorème 3.39, p. 132, Exercice 3.28, p. 154]. On note λ la mesure de Lebesgue.

7.1 Rappels sur les mesures

***Propriété 7.1* (des mesures)** — *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ vérifie les propriétés suivantes.*

* Monotonie : *Soit $A, B \in \mathscr{A}$, si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
* σ-sous-additivité : *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

* Continuité croissante : *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

* Continuité décroissante : *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\mu(A_k) < \infty$ pour un $k \in \mathbb{N}$, alors*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

7.2 Le développement

***Théorème* (d'Egorov)** — *Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers f mesurable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) \leq \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur A^c.*

Remarque — On montre aussi que l'on ne peut ni prendre μ tel que $\mu(X) = \infty$ dans les hypothèses ni prendre $\varepsilon = 0$ en conclusion.

DÉMONSTRATION : Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_{n,j} := \left\{x \in X \ : \ |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{j}\right\}, \qquad B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j}.$$

`1) Montrons qu'à` j `fixé,` $\lim_n \mu(B_{n,j}) = 0$.

* On remarque que $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([1/j, \infty]) \in \mathscr{A}$ car $|f - f_n|$ est mesurable.
* Puisque $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ p.p., il existe $C \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(C) = 0$ et $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in C^c$.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu(B_{n,j}) < \infty$ car $\mu(X) < \infty$ et $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$. La continuité décroissante de μ donne :

$$\mu(B_{n,j}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}\right).$$

Or si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, on a $x \in B_{n,j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_{n,j}$, i.e. $|f(x) - f_n(x)| \geq 1/j$. Comme j est fixé, ceci montre que que $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$ donc $x \in C$. On en déduit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j} \subset C$ et donc que $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}\right) = 0$ i.e. $\mu(B_{n,j}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

`2) Convergence uniforme.`

* Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, par `1)`, on a $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(B_{n,j}) \leq \varepsilon 2^{-j}$. On pose $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} B_{n_j,j}$ de sorte que $B \in \mathscr{A}$ et par σ-sous-additivité de μ :

$$\mu(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{n_j,j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

* Montrons que (f_n) converge uniformément vers f sur B^c. Par définition et passage au complémentaire, on a

$$B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcup_{p\geq n_j} A_{p,j}\right) \implies B^c = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*}\left(\bigcap_{p\geq n_j} A_{p,j}^c\right).$$

Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/j \leq \eta$. Soit $x \in B^c$, comme $x \in \bigcap_{p\geq n_j} A_{p,j}^c$, on a donc $x \in A_{p,j}^c$ pour tout $p \geq n_j$, c'est-à-dire :

$$p \geq n_j \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

Comme n_j ne dépend que de j et donc que de η et pas de $x \in B^c$, ceci prouve la convergence uniforme de (f_n) vers f sur B^c.

□

`1) Contre-exemple pour` $\varepsilon = 0$.

* On prend $(X, \mathscr{A}, \mu) = (]0,1[, \mathscr{B}(]0,1[), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $f_n = 1_{]0,1/n[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p. (et même pour tout $x \in]0,1[$). Soit maintenant $B \in \mathscr{B}(]0,1[)$ tel que $\lambda(B) = 0$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$).
* Soit $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que $B^c \cap]0,1/n[\neq \varnothing$ (car sinon on a $]0,1/n[\subset B$ et donc $1/n = \lambda(]0,1/n[) \leq \lambda(B) = 0$). Il existe donc $x \in B^c$ tel que $f_n(x) = 1$. On a donc $\sup_{x\in B^c} |f_n(x)| = 1$, ce qui prouve que (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur B^c.

`2) Contre-exemple pour` $\mu(X) = \infty$.

* On prend $(X, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on prend $f_n = 1_{]n,n+1[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p. (et même pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(B) = 0$. On va montrer que (f_n) ne peut pas converger uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\mu(X) = \infty$).

* Soit $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $B^c \cap]n, n+1[\neq \varnothing$ (car sinon on a $]n, n+1[\subset B$ et donc $1 = \lambda(]n, n+1[) \leq \lambda(B) \leq \varepsilon$). Il existe donc $x \in B^c$ tel que $f_n(x) = 1$, on a donc $\sup_{x \in B^c} |f_n(x)| = 1$, ce qui prouve que (f_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur B^c.

7.3 Complément

On peut reformuler l'énoncer pour en faire un résultat de probabilité :

"Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles qui converge presque partout vers une variable aléatoire X, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) \leq \varepsilon$ et (X_n) converge uniformément vers X sur A^c."

Références

[GH22] T. Gallouët and R. Herbin. *Mesure, intégration, probabilités.* Références sciences. Ellipses, 2 edition, 2022.